Вежба 30: Основе финансијске математике

Процентни рачун. Нека је G-главница, P-принос и p-проценат у децималном облику тада важи:

$$G : P = 1 : p \qquad (G \pm P) : (1 \pm p) = G : 1 = P : p$$

Интересни рачун (декурзиван интерес). Ако је: K_n, $K_{n,m}$, $K_{t,m}$, K_t крајњи капитал; K_0- почетни капитал; n, t-време; m-број обрачуна камате у току једне године; p - проценат у децималном запису. Тада:

$K_t = K_0(1 + pt)$	(Прост рачун)
$K_n = K_0(1 + p)^n$	(Сложен прекидни рачун)
$K_{n,m} = K_0 \left(1 + \frac{p}{m}\right)^{nm}$	(Сложен прекидни рачун са m обрачуна камате у току године)
$K_t = K_0 e^{pt}$	Сложен непрекидни рачун

1. После снижења од 20% роба се продаје по цени 236. За колико је снижена цена?

Решење: Према пропорцији $(G - P) : (1 - p) = P : p$, односно $236 : 0.8 = P : 0.2$, имамо $P = \dfrac{236 \cdot 0.2}{0.8} = 59$

2. Цена робе после повећања од 20% је 1236. Колика је цена робе била пре повећања?

Решење: Према пропорцији $(G + P) : (1 + p) = G : 1$, односно $1236 : 0.8 = G : 1$, имамо $G = 1030$

3. Ако је цена неком артиклу повећана два пута и то за 8% и 10%. Колико је укупно повећање цене у процентима? За колико процената треба смањити новодобијену цену да би она постигла почетну суму?

Решење: С обзиром да је $(1+0.08)\cdot(1+0.1) = 1.188$, имамо да је укупно повећање 18.8% . Решавањем једначине $1.188x = 1$, налазимо да је $x = 0.8418$, односно $p = 1 - 0.8418 = 0.1582$ (15.82%).

4. Ако је цена неком артиклу смањена два пута и то за 8% и 10%. Колико је укупно смањење цене у процентима? За колико процената треба повећати новодобијену цену да би она постигла почетну суму?

Решење: С обзиром да је $(1 - 0.08) \cdot (1 - 0.1) = 0.765$, имамо да је укупно смањење $p = 1 - 0.765 = 0.235$(23.5%). Решавањем једначине $0.765x = 1$, налазимо да је $x = 1.3072$, односно $p = 0.3072$ (30.72%).

5. Ако је годишња стопа инфлације 12%, колика је месечна стопа инфлације?

Решење: Нека је p-стопа месечне инфлације записана у децималниом облику, тада имамо $(1+p)^{12} = 1 + 0.12$. Одавде, $p = \sqrt[12]{1.12} - 1 = 0.0095$ (0.95%).

6. На колико нарасте улог од 25000 за три године, ако је интересна стопа 6% и капиталисање а) годишње б) тромесечно в) дневно г) непрекидно

Решење:

а) Према формули за сложен интересни рачун имамо $K_3 = 25000(1 + 0.06)^3 = 29775.4$

б) $K_{3,4} = 25000(1 + \frac{0.06}{4})^3 \cdot 4 = 29890.54$

в) $K_{3,365} = 25000(1 + \frac{0.06}{365})^3 \cdot 365 = 29929.99$

г) $K_3 = 25000\, e^{0.06\cdot 3} = 29930.43$

7. (ИЗ) Дата је годишња каматна стопа од 12% са полугодишњим капиталисањем. Израчунати годишњу каматну стопу која ће са месечним капиталисањем давати исте ефекте.

Решење: Према формули за сложен интересни рачун имамо $(1 + \frac{0.12}{2})^2 = (1 + \frac{p}{12})^{12}$, одакле је $p = 12(\sqrt[6]{1.06} - 1) = 0.1171(11.71\%)$

8. (ИЗ) Дата је годишња каматна стопа од 12%. Израчунати годишњу каматну стопу која ће са непрекидним капиталисањем давати исте ефекте.

Решење: Према формули за сложен интересни рачун имамо $(1+0.12)^1 = e^p$, одакле је $p = \ln 1.12 = 0.1133(11.33\%)$

9. (ИЗ) Одредити функцију акумулације и стопе раста акумулације у рачуну простих и рачуну сложених интереса.

Решење: С обзиром да је функција акумулације дефинисана са $a(t) = \dfrac{K_t}{K_0}$, то имамо

$$a(t) = \frac{K_t}{K_0} = \frac{K_0(1+pt)}{K_0} = 1+pt \qquad \text{(у рачуну простих интереса)}$$
$$a(t) = \frac{K_t}{K_0} = \frac{K_0(1+p)^t}{K_0} = (1+p)^t \qquad \text{(у рачуну сложених интереса са прекидним капиталисањем)}$$
$$a(t) = \frac{K_t}{K_0} = \frac{K_0 e^{pt}}{K_0} = e^{pt} \qquad \text{(у сложеном непрекидном интересном рачуну)}$$

Како је стопа акумулације функција чија је дефиниција $\delta(t) = \dfrac{a'(t)}{a(t)}$, то имамо:

$$\delta(t) = \frac{(1+pt)'}{1+pt} = \frac{p}{1+pt} \qquad \text{(за прост интересни рачун)}$$
$$\delta(t) = \frac{\left((1+p)^t\right)'}{(1+p)^t} = \frac{(1+p)^t \ln(1+p)}{(1+p)^t} = \ln(1+p) \qquad \text{(сложен интерес са прекидним капиталисањем)}$$
$$\delta(t) = \frac{\left(e^{pt}\right)'}{e^{pt}} = \frac{pe^{pt}}{e^{pt}} = p \qquad \text{(у сложеном непрекидном интересном рачуну)}$$

10. (ИЗ) Одредити ефективну (годишњу) интересну стопу која одговара номиналној годишњој стопи од 20% уз капиталисање које је:

а) полугодишње; б) тромесечно; в) непрекидно.

Решење: Узимањем да је $K_0 = 1$, на наједноставнији начин долазимо да резултата.

а) Како је $K_{1,2} = 1 \cdot (1+0.2/2)^2 = 1,21$, ефективна каматна стопа је $(1,21-1)\cdot 100\% = 21\%$

б) Сада имамо $K_{1,4} = 1 \cdot (1+0.2/4)^4 = 1,05^4 = 1.216$, па је ефективна каматна стопа 21.6%.

в) Сада је $K_t = 1 \cdot e^{0.2\cdot 1} = 1.221$, па је ефективна каматна стопа 22.1%.