Вежба 29: Теорија вероватноће - Решења задатака

1. а) $P(A) = \frac{1}{37} \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{1}{37} = \frac{1}{37^7}$ в) $P(C) = \frac{37}{37} \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{1}{37} = \frac{1}{37^6}$

б) $P(B) = \frac{13}{37} \cdot \frac{12}{37} \cdot \frac{11}{37} \cdot \frac{10}{37} \cdot \frac{9}{37} \cdot \frac{8}{37} \cdot \frac{7}{37} = \frac{13!}{6!37^7}$ г) $P(D) = \frac{1}{37} \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{1}{37} = \frac{1}{37^7}$

2. Задатак решавамо применом биномне расподеле вероватноћа. Ако са p означимо вероватноћу да у једном бацању на оба ночића падна иста страна, тада је $p = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Одавде, $q = 1 - p = \frac{1}{2}$. Како се експеримент понавља 4 пута, $n = 4$, па користимо $\mathcal{B}\left(4, \frac{1}{2}\right)$. Сада имамо:

а) $P(S_4 = 4) = \binom{4}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^{4-4} = \frac{1}{16}$ в) $P(S_4 = 1) = \binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{4-1} = \frac{1}{4}$

б) $P(S_4 = 0) = \binom{4}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{4-0} = \frac{1}{16}$

Напомена: Задатак се може решити и без примене биномне расподеле.

3. а) За догађај A разликујемо случајеве:

(1) $a \le \max\{b, c\}$: $P(A) = \dfrac{\binom{b}{a} + \binom{c}{a}}{\binom{b+c}{a}}$

(2) $b < a \le c$: $P(A) = \dfrac{\binom{c}{b}}{\binom{a}{b+c}}$

(3) $c < a \le b$: $P(A) = \dfrac{\binom{b}{c}}{\binom{a}{b+c}}$

За догађај B имамо:

(4) $a > c + 1$: $P(B) = 1$

(5) $a = c + 1$: $P(B) = 1 - \dfrac{1}{\binom{b+c}{c+1}}$

(6) $a \le c$: $P(B) = 1 - \dfrac{\binom{c}{a-1}\binom{b}{1} + \binom{c}{a}}{\binom{a}{b+c}}$

б) $P(A) = \left(\frac{b}{b+c}\right)^a + \left(\frac{c}{b+c}\right)^a = \frac{b^a + c^a}{(b+c)^a}$

За рачунање вероватноће случајног догађаја B, можемо применити биномну расподелу $\mathcal{B}\left(a, \frac{b}{b+c}\right)$. Наиме:

$$
\begin{aligned}
P(B) &= 1 - P(\overline{B}) = 1 - (P(S_a = 0) + P(S_a = 1)) \\
&= 1 - \left(\frac{c}{b+c}\right)^a - a \cdot \frac{b}{b+c} \cdot \left(\frac{c}{b+c}\right)^{a-1}
\end{aligned}
$$

4. а) Уведимо хипотезе:

H_1: из прве кутије у другу кутију је пребачена бела куглица

H_2: из прве кутије у другу кутију је пребачена црвена куглица

Тада, према формули за тоталну вероватноћу имамо:

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = \frac{x+1}{x+y+1} \cdot \frac{b}{b+c} + \frac{x}{x+y+1} \cdot \frac{c}{b+c} = \frac{b(x+1) + cx}{(x+y+1)(b+c)}$$

б) Уведимо хипотезе:

H_1: из прве кутије у другу кутију су пребачене 3 беле куглице

H_2: из прве кутије у другу кутију је пребачена 2 беле и 1 црвена куглица

H_3: из прве кутије у другу кутију је пребачена 1 бела и 2 црвене

H_2: из прве кутије у другу кутију су пребачене 3 црвене куглице

Тада, према формули за тоталну вероватноћу имамо:

$$\begin{aligned}P(A) &= P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + P(A|H_3)P(H_3) + P(A|H_4)P(H_4)\\ &= \frac{x+3}{x+y+3}\cdot\frac{\binom{b}{3}}{\binom{b+c}{3}} + \frac{x+2}{x+y+3}\cdot\frac{\binom{b}{2}\binom{c}{1}}{\binom{b+c}{3}} + \frac{x+1}{x+y+3}\cdot\frac{\binom{b}{1}\binom{c}{2}}{\binom{b+c}{3}} + \frac{x}{x+y+3}\cdot\frac{\binom{c}{3}}{\binom{b+c}{3}}\\ &= \frac{(x+3)b(b-1)(b-2)+3(x+2)b(b-1)c+3(x+1)bc(c-1)+xc(c-1)(c-2)}{(x+y+3)(b+c)(b+c-1)(b+c-2)}\end{aligned}$$

5. Уведимо следеће ознаке:
B_i: Библиотека i има књигу у свом фонду, $i\in\{1,2,3\}$
S_i: Књига у библиотеци i је слободна, $i\in\{1,2,3\}$
Тада, случајни догађај A, да ће студент пронаћи траженију књигу, можемо приказати са:

$$A = B_1S_1 + \overline{B_1S_1}B_2S_2 + \overline{(B_1S_1 + \overline{B_1S_1})}B_3S_3$$

Одакле,

$$P(A) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{9}{16}\cdot\frac{1}{4} = \frac{37}{64}$$

6. Задатак ћемо решити применом Бајесове формуле. Уведимо следеће ознаке:
H_1: Изабрана је коцка којој су три поља означена бројем 1, а преостала бројем 2
H_2: Изабрана је коцка којој су два поља означена бројем 1, а преостала бројем 2
A: На баченој коцки појавио се број 1
Тада, имамо:

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A|H_1)P(H_1)+P(A|H_2)P(H_2)} = \frac{\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}$$

7. Задатак ћемо решити применом формуле за условну вероватноћу.
Означимо са H случајан догађај: Извлаче се две куглице различитих боја. Тада имамо:

$$P(A|H) = \frac{P(AH)}{P(H)} = \frac{\frac{\binom{7}{1}\binom{8}{1}}{\binom{24}{2}}}{\frac{\binom{7}{1}\binom{8}{1}+\binom{7}{1}\binom{9}{1}+\binom{8}{1}\binom{9}{1}}{\binom{24}{2}}} = \frac{56}{56+63+72} = \frac{56}{191}$$

За догађај B имамо,

$$P(B|H) = 1 - P(\overline{B}|H) = 1 - \frac{\frac{\binom{8}{1}\binom{9}{1}}{\binom{24}{2}}}{\frac{\binom{7}{1}\binom{8}{1}+\binom{7}{1}\binom{9}{1}+\binom{8}{1}\binom{9}{1}}{\binom{24}{2}}} = 1 - \frac{72}{191} = \frac{119}{191}$$

8. Означимо са A случајан догађај да се међу 4 извучене куглице нађу 2 беле и 2 црвене.

а) С обзиром да се ради о понављању експеримента, задатак решавамо применом биномног модела за расподелу вероватноћа. Ако са S означимо догађај да се у једном извлачењу појави беле куглица тада имамо: $p = P(S) = \frac{3}{4}$, $q = 1-p = \frac{1}{4}$, $n=4$, $k=2$ па је према биномној расподели вероватоћа:

$$P(A) = \binom{4}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 6\cdot\frac{9}{256} = \frac{27}{128}$$

б) $P(A) = \dfrac{\binom{30}{2}\binom{10}{2}}{\binom{40}{4}} = \dfrac{9\cdot15\cdot29}{13\cdot37\cdot38} = \dfrac{3915}{18278} \approx 0.214$

9. Означимо са A случајан догађај да се после губљења куглице из кутије извлачењем 3 куглице извуку 1 бела и 2 црвене куглице. Применом Бајесове формуле

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B)P(B)} = \frac{\frac{\binom{7}{1}\binom{9}{2}}{\binom{16}{3}} \cdot \frac{8}{17}}{\frac{\binom{7}{1}\binom{9}{2}}{\binom{16}{3} \cdot \frac{8}{17}} + \frac{\binom{8}{1}\binom{8}{2}}{\binom{16}{3}} \cdot \frac{9}{17}} = \frac{\frac{9}{20} \cdot \frac{8}{17}}{\frac{9}{20} \cdot \frac{8}{17} + \frac{2}{5} \cdot \frac{9}{17}} = \frac{1}{2}$$

С обзиром да је догађај B у датом контексту супротан догађају A, то је и његова вероватноћа једнака 0.5.