Вежба 29: Теорија вероватноћа

- Елементаран исход случајног догађаја обележавамо са ω_i. Скуп свих могућих исхода случајног догађаја обележавамо са Ω. $A \subseteq \Omega$ је догађај. $\overline{A}$ је догађај супротан догађају A.
- Ако је m број елементарних исхода којим се остварује догађај A и n број елемената скупа Ω, тада

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad \text{(Bernoulli)}$$

- За свако $A, B \subseteq \Omega$:
  1) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ 2) $0 \leq P(A) \leq 1$ 3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Број различитих подскупова од тачно k елемената неког скупа који има n елемената је: $\binom{n}{k}$
- Условна вероватноћа: $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$
- Догађаји A и B су независни ако важи: $P(AB) = P(A)P(B)$
- Ако је $i \neq j \to H_i \cap H_j = \emptyset \wedge \Omega = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n$, тада важи:

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + \cdots + P(A|H_n)P(H_n)$$
$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + \cdots + P(A|H_n)P(H_n)}$$

- Биномна расподела вероватноћа: $P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, где је: n број понављања опита, k број успешних опита, p вероватноћа успеха у једном опиту и $q = 1 - p$.

1. У рулету, у једној игри, куглица се може зауставити на једном од поља означеним бројевима од 0 до 36. Посматрамо резултат 13 одређених игара. Колика је вероватноћа случајног догађаја да се у посматраним играма куглица заустави:

а) A – редом на сваком од бројева од 1 до 13 по једном;
б) B – на сваком од бројева од 1 до 13 по једном;
в) C – сваки пут на истом броју;
г) D – сваки пут на броју 3?

2. Бацају се два новчића четири пута.

а) Одредити вероватноћу догађаја да у сва четири бацања падне иста страна на оба новчића.
б) Одредити вероватноћу догађаја да у сва четири бацања на новчићима падне различита страна.
в) Одредити вероватноћу догађаја да у једном бацању на новчићима падну исте, а у преостала три бацања, различите стране.

3. Из кутије у којој се налази b ($b \geq 2$) белих и c ($c \geq 2$) црвених куглица на случајан начин извлачимо a ($2 \leq a \leq b+c$) куглице. Колике су вероватноће догађаја: A – да извучемо све куглице исте боје и B – да извучемо бар 2 куглице беле боје, уколико куглице извлачимо

а) одједном;

б) једну за другом са враћањем?

4. У првој кутији има b – белих и c црвених, а у другој x – белих и y – црвених куглица.

а) Из прве кутије пребацујемо једну куглицу у другу кутију, не обраћајући пажњу на њену боју. Након тога, из друге кутије извлачимо једну куглицу. Колика је вероватноћа догађаја A да је извучена куглица беле боје?

б) Претпостављајући да је $b \geq 3$ и $c \geq 3$, из прве кутије пребацујемо три куглице у другу кутију, не обраћајући пажњу на њихове боје. После тога, из друге кутије извлачимо једну куглицу. Колика је вероватноћа догађаја B да је извучена куглица беле боје?

5. Да би пронашао једну књигу, студент има намеру да обиђе три библиотеке. За сваку од библиотека је једнако вероватно да нема, односно да има ту књигу у свом књижном фонду, а такође, ако библиотека има књигу, вероватноћа да је та књига слободна једнака је вероватноћи да је иста заузета. Колика је вероватноћа да ће студент добити тражену књигу?

6. У кутији се налазе две коцке. Једној су три поља означена бројем 1 и три преостала поља бројем 2, док су другој два поља означена бројем 1, а преостала четири поља бројем 2. Случајно извлачимо једну коцку и бацамо је. Појавио се број 1. Која је вероватноћа да смо извукли прву коцку?

7. Из кутије у којој се налази 7 белих, 8 црвених и 9 зелених куглица извучене су одједном 2 куглице. Испоставило се да су те 2 куглице различитих боја. Наћи вероватноћу догађаја A да је једна од њих бела и једна црвена и догађаја B да је једна од њих бела.

8. У кутији се налази 30 белих и 10 црвених куглица. Наћи вероватноћу да ће од 4 извучене куглице 2 бити беле и 2 црвене, уколико:

а) извлачимо 4 куглице из кутије, једну за другом, тако што сваки пут поново вратимо извучену куглицу у кутију, да би извлачење поновили из кутије са почетним бројем куглица;

б) извлачимо 4 куглице из кутије одједном.

9. Из кутије у којој се налази 8 белих и 9 црвених куглица једна куглица је изгубљена. Да бисмо, на основу експеримента, извели закључак о боји изгубљене куглице, извукли смо случајно одједном 3 куглице, и то 1 белу и 2 црвене. Наћи вероватноћу догађаја B да је изгубљена куглица беле боје и догађаја C да је изгубљена куглица црвене боје.