Вежба 10: Диференцне једначине - Решења

1. Решити диференцну једначину: $8y_{t+1} - 6y_t = 7$.

Решење:

(1) Решимо прво хомогени део диференцне једначине: $8y_{t+1} - 6y_t$.
С обзиром да је карактеристична једначина која одговара хомогеном делу $8\lambda - 6 = 0$, а њено решење $\lambda = \frac{3}{4}$, имамо да је опште решење хомогеног дела ове једначине:

$$y_t^h = C\left(\frac{3}{4}\right)^t$$

(2) Одредимо сада једно партикуларно решење целе једначине. Како је са десне стране једнакости константа и решење карактеристичне једначине није број 1, партикуларно решење ћемо тражити у облику: $y_t^p = y^*$, где је y^* нека константа коју тек треба одредити. Заменом $y_t^p = y^*$ у целу једначину добијамо:

$$8y^* - 6y^* = 7,$$

одакле налазимо $y^* = \frac{7}{2}$, па је партикуларно решење $y_t^p = \frac{7}{2}$

(3) Опште решење целе диференцне једначине је збир хомеогеног и партикуларног решења, односно:

$$y_t = y_t^h + y_t^p = C\left(\frac{3}{4}\right)^t + \frac{7}{2}$$

2. Низ y_t задовољава диференцну једначину $3y_t = 2y_{t-1} + 10$.

а) Одредити решење диференцне једначине које задовољава почетни услов $y_0 = 25$

б) Опиши понашање тог решења кад $t \to \infty$.

в) Одредити најмање t за које се y_t разликује од решења независног од времена за мање од 0.5.

Решење:

а) На сличан начин као у првом задатку налазимо опште решење диференцне једначине: $y_t = C\left(\frac{2}{3}\right)^t + 10$. Због почетног услова имамо:

$$y_0 = C\left(\frac{2}{3}\right)^0 + 10 = 25,$$

одакле добијамо $C = 15$, па је тражено решење:

$$y_t = 15\left(\frac{2}{3}\right)^t + 10$$

б) С обзиром да је $y(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^t$ опадајућа функција, то цео израз монотоно опадајући тежи ка 10, кад се t неограничено увећава.

в) Како је решење независно од времена, партикуларно решење, то је задати захтев еквивалентан редом условима:

$$\begin{aligned}
|y_t - 10| = \left|15\left(\frac{2}{3}\right)^t + 10 - 10\right| &\leq 0.5 \\
15\left(\frac{2}{3}\right)^t &\leq \frac{1}{2} \\
\left(\frac{2}{3}\right)^t &\leq \frac{1}{30} \quad \text{(Применимо ln функцију на обе стране једнакости)} \\
t\ln\frac{2}{3} &\leq \ln\frac{1}{30} \\
t &\geq \frac{\ln\frac{1}{30}}{\ln\frac{2}{3}} \quad \text{(Смер једнакости се променио јер је } \ln\frac{2}{3} < 0!) \\
t &\geq \frac{-\ln 30}{\ln 2 - \ln 3} \\
t &\geq \frac{\ln 30}{\ln 3 - \ln 2} \approx 8,3
\end{aligned}$$

Како t мора бити природан број, тражено $t = 9$.

3. Решити диференцну једначину

$$y_{t+2} - 8y_{t+1} + 16y_t = 9$$

Решење:

(1) Решимо прво хомогени део диференцне једначине: $y_{t+2} - 8y_{t+1} + 16y_t = 0$.
С обзиром да је карактеристична једначина која одговара хомогеном делу $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$, а њена решења $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, имамо да је опште решење хомогеног дела ове једначине:

$$y_t^h = (C_1 t + C_2)4^t$$

(2) Одредимо сада једно партикуларно решење целе једначине. Како је са десне стране једнакости константа и решења карактеристичне једначине се разликују од 1, партикуларно решење ћемо тражити у облику: $y_t^p = y^*$, где је y^* нека константа коју тек треба одредити. Заменом $y_t^p = y^*$ у целу једначину добијамо:

$$y^* - 8y^* + 16y^* = 9,$$

одакле налазимо $y^* = 1$, па је партикуларно решење $y_t^p = 1$

(3) Опште решење целе диференцне једначине је збир хомеогеног и партикуларног решења, односно:

$$y_t = y_t^h + y_t^p = (C_1 t + C_2)4^t + 1$$

4. Низ x_t задовољава диференцну једначину:

$$x_t - 2x_{t-1} + 4x_{t-2} = 3, \text{ за } t \geq 2$$

а) Одредити опште решење диференцне једначине

б) Одредити партикуларно решење диференцне једначине која задовољава услове: $x_0 = 1$ и $x_1 = 4$.

в) Испитати понашање низа x_t кад се параметар t неограничено увећава.

Решење:

а) Карактеристична једначина која одговара овој диференцној једначини је: $\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0, \lambda \in \mathbb{C}$. Њена решења налазимо применом познате формуле за решење квадратне једначине:

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = 1 \pm \sqrt{3}i.$$

Нађимо сада координате ових комплексних бројева у поларним координатама. За комплексне бројеве имамо $\lambda_{1,2}$,

$$\rho = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2,$$

и

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{1} \quad \text{одакле} \quad \varphi = \frac{\pi}{3}$$

С обзиром на претходно, опште решење хомогеног дела дифренцне једначине је:

$$x_t^h = 2^t \left(C_1 \cos\left(\frac{\pi}{3} t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi}{3} t\right) \right)$$

Партикуларно решење x_t^p, с обзиром да је на десној страни једначине константа тражимо у облику $x_t^p = c$. Заменом у једначину, добијамо $c - 2c + 4c = 3$, одакле је $c = 1$

Како је опште решење диференцне једначине збир партикуларног и хомогеног решења, то имамо:

$$x_t = x_t^h + x_t^p = 2^t \left(C_1 \cos\left(\frac{\pi}{3} t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi}{3} t\right) \right) + 1$$

б) Замењујући у опште решење $t = 0$ и t_1 и имајући у виду задате услове, добијамо систем линераних једначина по C_1 и C_2:

$$x_0 = 2^0 \left(C_1 \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot 0\right)) + C_2 \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot 0\right) \right) + 1 = 1$$
$$x_1 = 2^1 \left(C_1 \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot 1\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot 1\right) \right) + 1 = 4$$

односно

$$C_1 = 0$$
$$C_1 + \sqrt{3} C_2 = 3$$

одакле налазимо, $C_1 = 0$ и $C_2 = \sqrt{3}$. Дакле партикуларно решење која задовољава почетне услове је:

$$x_t = 2^t \sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{3} t\right) + 1$$

в) С обзиром да се израз 2^t неограничено увећава, а израз $\sin\left(\frac{\pi}{3} t\right)$ периодично мења вредности $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0$ то дати низ дивергира.

5. Наћи опште решење диференцне једначине $2y_{t+2} - 3y_{t+1} - 2y_t = 6$. Одредити партикуларно решење које задовољава услове $y_0 = 1$ и $2y_1 = -1$, а затим прокоментарисати његово понашање кад се параметар t неограничено увећава.

Решење:

- ♡ Опште решење: $y_t = C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^t + C_2 \cdot 2^t - 2$
- ♡ Партикуларно које задовољава услове: $y_t = 3 \left(\frac{1}{2}\right)^t - 2$
- ♡ Монотоно растући тежи ка -2.

6. Наћи опште решење диференцне једначине $6y_{t+2} - y_{t+1} - y_t = 8$. Одредити партикуларно решење које задовољава услове $y_0 = 1$ и $2y_1 = -1$, а затим прокоментарисати његово понашање кад се параметар t неограничено увећава.

Решење:

- ♡ Опште решење: $y_t = C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^t + C_2 \left(-\frac{1}{3}\right)^t + 2$
- ♡ Партикуларно које задовољава услове: $y_t = -\frac{17}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^t + \frac{12}{5} \left(-\frac{1}{3}\right)^t + 2$
- ♡ Осцилаторно тежи ка 2.

7. Наћи опште решење диференцне једначине $y_t - 3y_{t-1} + 2y_{t-2} = 4 \cdot 3^t$. Одредити партикуларно решење које задовољава услове $y_0 = 17$ и $y_1 = 53$, а затим прокоментарисати његово понашање кад се параметар t неограничено увећава.

- ♡ Опште решење: $y_t = C_1 + C_2 \cdot 2^t + 18 \cdot 3^t$ (Партикуларно решење тражити у облику:$y_t^p = c \cdot 3^t$)
- ♡ Партикуларно које задовољава услове: $y_t = -1 + 18 \cdot 3^t$
- ♡ Монотоно растући тежи ка бесконачности.