Домаћи задатак 13 - Р

7. Испитати диференцијабилност функције $f(x) = \begin{cases} 2\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ \pi, & x = 0 \end{cases}$ у тачки $x = 0$.

Решење: Функција f је диференцијабилна у тачки $x = 0$ ако постоји гранична вредност:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

За дату функцију:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{2\operatorname{arctg}\frac{1}{h^2} - \pi}{h} \\ &= -2\lim_{h\to 0} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{h^2}}{h} \end{aligned}$$

Ако уведемо смену $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{h^2} = t$, тада имамо

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{h^2} = t &\to \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{h^2}) = \operatorname{ctg} t \\ &\to \operatorname{tg}\operatorname{arctg}\frac{1}{h^2} = \operatorname{ctg} t \\ &\to \frac{1}{h^2} = \operatorname{ctg} t \\ &\to h^2 = \frac{1}{\operatorname{ctg} t} = \operatorname{tg} t > 0 \\ &\to h = \sqrt{\operatorname{tg} t} \end{aligned}$$

Сада

$$\begin{aligned} -2\lim_{h\to 0} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{h^2}}{h} &= -2\lim_{t\to 0^+} \frac{t}{\sqrt{\operatorname{tg} t}} \\ &= -2\lim_{t\to 0^+} \sqrt{\frac{t^2}{\operatorname{tg} t}} \\ &= -2\lim_{t\to 0^+} \sqrt{\frac{t^2}{\frac{\sin t}{\cos t}}} \\ &= -2\lim_{t\to 0^+} \sqrt{\frac{t\cdot t\cos t}{\sin t}} \\ &= -2\lim_{t\to 0^+} \sqrt{\frac{t}{\sin t}\cdot t\cos t} \\ &= -2\sqrt{1\cdot 0\cdot 1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Како одговарајућа гранична вредност постоји и коначна је (једнака је 0), функција је диференцијабилна у тачки $x = 0$