Tuesday, March 23, 2021 6:00 PM

Error: 4.10, 4.11; 4.14, 4.15

4.14. Износи губитака прате Парето расподелу са $\alpha = 2$ и $\theta = 2000$.
Одредити рацио елиминисаних губитака увођењем одбитне франшизе од 500.
[deducible of 500]

Решење. $$РЕГ = \frac{E(X \wedge d)}{E(X)}$$

$E(X)$; $X : Par(2, 2000)$; $E(X) = \frac{\theta}{\alpha - 1}$; $\alpha > 1$

1) $$E(X) = \frac{2000}{2-1} = 2000;$$

$$F_X(x) = 1 - \left(\frac{\theta}{\theta + x}\right)^{\alpha}$$

$$E(X \wedge d) = \int_0^d \left(1 - F_X(x)\right) dx$$

$$= \int_0^{500} \left(\frac{2000}{2000 + x}\right)^2 dx$$

$$= 2000^2 \cdot \int_0^{500} \frac{1}{(2000 + x)^2} dx$$

$$= 2000^2 \cdot \frac{-1}{2000 + x}\Bigg|_0^{500} = 2000^2 \cdot \left(-\frac{1}{2500} + \frac{1}{2000}\right)$$

$$= 2000^2 \cdot \frac{1}{10{,}000} = \frac{\cancel{2000} \cdot 2000}{\cancel{10{,}000}_{5}} = 400$$

$$РЕГ = \frac{400}{2000} = \frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\%$$

4.15. Износи губитака у 2003 имају дискретну униформну расподелу на вредностима 1000, 2000, 3000, 4000, 5000 и 6000. Потписан је уговор о осигурању са одбијајућим прагом од 1500 и имамо инфлацију на све исплате из 2003 у 2004 у износу од 5%. Без мењања одбијајућег прага, одредити процентуални пораст у очекиваним исплатама из 2003 у 2004.

Решење: $p(x_i) = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, \dots, n$; $\Longleftarrow$ Униформна расподела!

2003.

$$E(Y) = \sum_{x_i > d} x_i \cdot p(x_i) \qquad \boxed{n = 6}$$

$$= 500 \cdot \frac{1}{6} + 1500 \cdot \frac{1}{6} + 2500 \cdot \frac{1}{6} + 3500 \cdot \frac{1}{6} + 4500 \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot (\underbrace{500 + 1500 + 2500 + 3500 + 4500}_{5}) = \frac{12500}{6}$$

2004.

$$X^* = (1+r)X = 1,05 \cdot X$$

$$Y^*$$

$$E(Y^*) = \sum_{x_i^* > d} x_i^* \cdot p(x_i^*)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot (600 + 1650 + 2700 + 3750 + 4800)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 13,500$$

$$\frac{\frac{1}{6}\, 13,500 - \frac{1}{6}\, 12,500}{\frac{1}{6} \cdot 12,500} = \frac{1000}{12500} = \frac{2}{25} = \frac{8}{100} \rightarrow 8\%$$

Модели опстанка
(Survival Models)

failure –
survival – опстанак

Х: Случајна променљива : доб престанка функционисања

$$\underset{0}{|}\xrightarrow{\quad T \quad} \underset{x}{|} \quad X$$

T : дужина „живота" ентитета

- $F_X(x) = P(X \le x)$; $x \ge 0$

$P(X=0) = 0$ $\quad X=0$

${}_x q_0$ – актуарска ознака

ФЈ Расподеле преживљења (Survival distibution function of X)

$S_X(x) = P(X > x)$ „вероватноћа да ће ентитет живети дуже од x"

$= 1 - P(X \le x) = 1 - F_X(x)$

${}_x p_0$ – актуарска ознака

- $F_X(0) = 0$, $F_X(+\infty) = 1$

$S_X(0) = 1$, $S_X(+\infty) = 0$

Пример. Употребите KFR и KFP да изразите вероватноћу да ће ентитет, за који је познато да постоји у доби 0, живети између 10 и 20.

- $(10 < X \le 20)$

$P(10 < X \le 20) = F_X(20) - F_X(10)$

$= (1 - S_X(20)) - (1 - S_X(10))$

$= S_X(10) - S_X(20).$

Функција густине X: $\left(f_X(x)\right)$

$$\left(F_X(x)\right)' = f_X(x) \checkmark \quad ; \quad f_X(x) = \frac{d}{dx}\left(F_X(x)\right)$$

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}\left(1 - S_X(x)\right) = -\frac{d}{dx} S_X(x) ;$$

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(t)\,dt ;$$

$$S_X(x) = -\int_0^x f_X(t)\,dt = \int_x^{+\infty} f_X(t)\,dt \quad (\text{доказ!})$$

[ознаке! $f_X(x)$, $f_X(t)$, $f_X(y)$, ...]

$$S_X(x) = P(X > x) = \int_x^{+\infty} f_X(t)\,dt$$

* Hazard rate (стопа хазарда, стопа смртности)

$P(A) \cdot P(A/B) = P(AB)$

вероватноћа условне густине отказа у доби x, за дато x

• $\dfrac{\text{вероватноћа доживљења } x}{\text{безусловна вероватноћа доживљења доби } x} =$

$$\underbrace{\lambda_X(x)}_{\text{Hazard rate}} \cdot S_X(x) = f_X(x)$$

$$\lambda_X(x) = \frac{f_X(x)}{S_X(x)} \checkmark \quad = \mu_x$$

$$\lambda_X(x) = \frac{-\frac{d}{dx}\left(S_X(x)\right)}{S_X(x)} = -\frac{d}{dx} \ln S_X(x)$$

$$\int_0^x \lambda_X(y)\,dy = -\ln S_X(x)$$

$$S_X(x) = e^{-\int_0^x \lambda_X(y)\,dy} \quad ; \quad \Lambda_X(x) = \int_0^x \lambda_X(y)\,dy$$

$$S_X(x) = e^{-\Lambda_X(x)} ;$$

Пример. Случајна променљива за доб престанка функционисања дефинисана је са

$$F_X(x) = 1 - 0.1\cdot(100-x)^{\frac{1}{2}} \quad \text{за } 0 \le x \le 100$$

а) Одредити кумулативну ф-ју расподеле опстанка.

б) Одредити ф-ју хазарда.

а) $$S_X(x) = 1 - F_X(x) = 0.1\cdot(100-x)^{\frac{1}{2}}$$

б) $$\lambda_X(x) = \frac{-\frac{d}{dx}\left(S_X(x)\right)}{S_X(x)} = \frac{-\cancel{0.1}\cdot\frac{1}{2}(100-x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-1)}{\cancel{0.1}\cdot(100-x)^{1/2}}$$

$$\lambda_X(x) = \frac{1}{2(100-x)} \qquad 0 \le x \le 100;$$

* Моменти случајне променљиве за доб престанка функционисања

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x f_X(x)dx \; ; \qquad \boxed{E(X) = \int_0^{\infty} S_X(x)\, dX} \; (\mathrm{I})$$

$$u = S_X(x) \; ; \quad dx = dv$$

$$du = \frac{d}{dx}\left(S_X(x)\right), \quad x = v$$

$$\mathrm{I}: \quad E(X) = x\cdot S_X(x)\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x\cdot\frac{d}{dx}S_X(x)\, dx$$

$$= 0 + \int_0^{+\infty} x\cdot\left(-\frac{d}{dx}S_X(x)\right)dx = \int_0^{+\infty} x\cdot f_X(x)dx = E(X)$$

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2\cdot f_X(x)\,dx \; ;$$

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

$E(X)$ – очекивана дужина живота при рођењу

$$E(X) \equiv \mathring{e}_0 \quad ; \quad \overline{\mathring{e}_x}| \quad ; \quad \lambda_X(x) = \mu_x$$

Медијана. Зрелост (y) за коју постоји 50% шансе да ће је X премашити.; $P(X>y) = P(X<y) = \frac{1}{2}$.

Tuesday, March 23, 2021 7:35 PM

Прим: За расподелу из претходног примера, одредити медијану

- $X : F_X(x) = 1 - 0.1 \cdot (100-x)^{1/2}$

$P(X > y) = \frac{1}{2}$; $P(X \le y) = \frac{1}{2} = F_X(y) = \frac{1}{2}$

$$1 - 0.1 \cdot (100-y)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$0.1 \cdot (100-y)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \quad / \cdot 10$$

$$(100-y)^{1/2} = 5 \quad /^2$$

$$100 - y = 25$$

$y = 75$; Медијана је 75.

- Актуарски модели преживљавања. Примери.

(1) Униформна расподела.

$$X : \mathcal{U}(a,b) \; ; \begin{cases} f_X(x) = \frac{1}{b-a} ; & a \le x \le b \\ f_X(x) = 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

У актуарству: $a = 0$, $b = \omega$

$$X : \mathcal{U}(0,\omega) \; , \; f_X(x) = \frac{1}{\omega}$$

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{\omega}\, dt = \frac{t}{\omega}\Big|_0^x = \frac{x}{\omega} \; , \quad 0 \le x \le \omega$$

$$S_X(x) = 1 - \frac{x}{\omega} = \frac{\omega - x}{\omega}$$

$$\lambda_X(x) = \frac{-\frac{d}{dx}(S_X(x))}{S_X(x)} = \frac{-\left(-\frac{1}{\omega}\right)}{\frac{\omega - x}{\omega}} = \frac{1}{\omega - x}$$

$$E(X) = \frac{\omega}{2} \; , \quad Var(X) = \frac{\omega^2}{12}$$

(2) Експоненцијална расподела

$$X : \mathcal{E}(\lambda) \; ; \quad F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \; , \quad x > 0$$

$$S_X(x) = e^{-\lambda x}$$

$$f_X(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$$

$$\lambda_X(x) = \frac{f_X(x)}{S_X(x)} = \frac{\lambda \cdot e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda x}} = \lambda$$ – константна стопа смртности

(3) Gompertz-ова расподела

$$\lambda_X(x) = B\cdot c^x, \quad x>0, \; B>0, \; c>1;$$

$$S_X(x) = e^{-\int_0^x B\cdot c^t\,dt} = e^{\frac{B}{\ln c}(1-c^x)}$$

$$f_X(x) = \lambda_X(x)\cdot S_X(x);$$

(4) Makeham-ова расподела

$$\lambda_X(x) = A + B\cdot c^x; \quad x>0, \; B>0, \; c>1, \; A>-B;$$

$$S_X(x) = e^{-\int_0^x (A+B\cdot c^t)\,dt} = e^{\left(\frac{B}{\ln c}(1-c^x) - Ax\right)}$$

(5) Weibull-ова расподела

$$\lambda_X(x) = k\cdot x^n; \quad x\geq 0, \; k>0, \; n>-1;$$

$$S_X(x) = e^{-\int_0^x k\cdot t^n\,dt} = e^{-\frac{k\cdot x^{n+1}}{n+1}};$$

Пример. Нека X има експоненцијалну расподелу са $\lambda=1$. и нека $Y = g(X) = X^{1/2}$

Одредити:
а) Кумулативну расподелу вероватноћа доживљења
б) Густину расподеле доби до престанка функционисања
в) функцију стопе хазарда

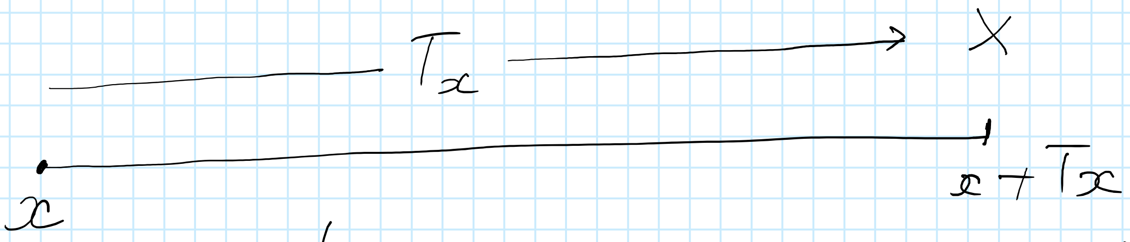
а)
$$F_Y(y) = P(Y\leq y) = P(X^{1/2}\leq y) = P(X\leq y^2)$$
$$= F_X(y^2) = 1-e^{-y^2}; \quad \underline{X : \mathcal{E}(1),\; F_X(x) = 1-e^{-1\cdot x}}$$
$$S_Y(y) = 1-F_Y(y) = e^{-y^2}$$

б)
$$f_Y(y) = -\frac{d}{dy}S(y) = -(-2y)\cdot e^{-y^2} = 2y\cdot e^{-y^2}$$

в)
$$\lambda_Y(y) = \frac{f_Y(y)}{S_Y(y)} = \frac{2y\cdot e^{-y^2}}{e^{-y^2}} = 2y;$$

Tuesday, March 23, 2021 8:04 PM

Случајна променљива — време до престанка функционисања



- Кумулативна функција расподеле остатка T_x

$$P(T_x > t) = {}_tp_x$$ — вероватноћа да ће ентитет живети више од t ако је познато да је доживео доб x.

$${}_tp_x = P(T_x > t) = P(X > x+t \mid X > x) = S_{T_x}(t)$$

$$\left[P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \right]$$

$$= \frac{P(X > x+t \land X > x)}{P(X > x)}$$

$$= \frac{P(X > x+t)}{P(X > x)} = \frac{S_X(x+t)}{S_X(x)}$$

- Кумулативна функција расподеле за T_X

$${}_tq_x = F_{T_X}(t) = P(T_X \le t)$$

$$= P(X \le x+t \mid X > x)$$

$$= 1 - P(X > x+t \mid X > x)$$

$$= 1 - \frac{S_X(x+t)}{S_X(x)} \checkmark$$

$${}_tq_x = 1 - \frac{1 - F_X(x+t)}{1 - F_X(x)} = \frac{1 - F_X(x) - 1 + F_X(x+t)}{1 - F_X(x)}$$

$${}_tq_x = \frac{F_X(x+t) - F_X(x)}{1 - F_X(x)} \checkmark \;;$$

- $x = 1$ $\qquad p_x = P(X > x+1 \mid X > x) = \dfrac{S_X(x+1)}{S_X(x)}$

- Функције густине за T_X

Tuesday, March 23, 2021 8:17 PM

$$F_{T_x}(t) = 1 - \frac{S_X(x+t)}{S_X(x)} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(-S_X(x+t)\right) = f_X(x+t)$$

$$f_{T_x}(t) = \frac{f_X(x+t)}{S_X(x)} .$$

густина с.в. T_X