

$$X \rightarrow P(X = x_i) = p_i \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ i = 1, 2, \dots \end{matrix}$$

$$X : P(\lambda) \quad P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \quad k = 0, 1, \dots$$

$$X \rightarrow F_X(x) = P(X \leq x) \rightarrow \text{кумулятивная функция распределения}$$

$$\rightarrow f_X(x) - \text{плотность распределения}$$

• Теперь сатва новых распределений
 X — число осуществлений за время t

1) $X > 0$

Y — число осуществлений!

$$Y = g(X)$$

$$X \rightarrow F_X(x), f_X(x)$$



$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(g(X) \leq y) = P(X \leq g^{-1}(y)) \\ &= F_X(g^{-1}(y)) \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= (F_Y(y))' = (F_X(g^{-1}(y)))' \\ &= f_X(g^{-1}(y)) \cdot (g^{-1}(y))' \end{aligned}$$

4.2.1. Множество скаляров

$$\begin{aligned} Y = c \cdot X &\rightarrow F_Y(y) = F_X\left(\frac{y}{c}\right) \\ f_Y(y) &= f_X\left(\frac{y}{c}\right) \cdot c \end{aligned} \quad \left. \begin{matrix} \} \\ \} \end{matrix} \right\}$$

Задатак. Pokazati da $X: \text{Par}(\alpha, \theta)$ ima skalirani parameter!

$$\bullet \begin{cases} X: \text{Par}(\alpha, \theta), & F_X(x) = 1 - \left(\frac{\theta}{x+\theta}\right)^\alpha \\ & f_X(x) = \frac{\alpha \cdot \theta^\alpha}{(x+\theta)^{\alpha+1}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y = c \cdot X, & f_Y(y) = f_X\left(\frac{y}{c}\right) \cdot \frac{1}{c} \\ X = \frac{Y}{c} \\ g^{-1}(x) = \frac{y}{c} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \frac{\alpha \cdot \theta^\alpha}{\left(\frac{y}{c} + \theta\right)^{\alpha+1}} \cdot \frac{1}{c}$$

$$= \frac{\alpha \cdot \theta^\alpha}{\left(\frac{y + c\theta}{c}\right)^{\alpha+1}} \cdot \frac{1}{c}$$

$$= \frac{\alpha \cdot \theta^\alpha}{\frac{(y + c\theta)^{\alpha+1}}{c^{\alpha+1}}} \cdot \frac{1}{c} = \frac{\alpha \cdot \theta^\alpha \cdot c^{\alpha+1}}{(y + c\theta)^{\alpha+1}} \cdot \frac{1}{c}$$

$$= \frac{\alpha \cdot \theta^\alpha \cdot c^\alpha}{(y + c\theta)^{\alpha+1}} = \frac{\alpha \cdot (c\theta)^\alpha}{(y + c\theta)^{\alpha+1}}$$

$$Y: \text{Par}(\alpha, c\theta)$$

нова raspodela je Pareto sa parametrima α i $c\theta$

// po definiciju
Pareto raspodela ima skalirani parameter (θ).

4.2.3. Операция с мететом

А. $Y = X^{\frac{1}{\tilde{c}}}$ — трансформация прме.

Б. $Y = X^{-\frac{1}{\tilde{c}}}$ — инв. трансформация прме.

$Y = X^{-1}$ — инверзно преобразование

А.

$$g(x) = x^{\frac{1}{\tilde{c}}} = Y$$

$$X = Y^{\tilde{c}}$$

$$g^{-1}(Y) = Y^{\tilde{c}}$$

$$F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y)) = F_X(y^{\tilde{c}})$$

$$f_Y(y) = f_X(y^{\tilde{c}}) \cdot \tilde{c} \cdot y^{\tilde{c}-1}$$

Б.

$$g(x) = x^{-\frac{1}{\tilde{c}}} = Y$$

$$y^{\tilde{c}} = x^{-1} \Rightarrow x = y^{-\tilde{c}}$$

$$F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y)) = F_X(y^{-\tilde{c}})$$

$$f_Y(y) = f_X(y^{-\tilde{c}}) \cdot |-\tilde{c} \cdot y^{-\tilde{c}-1}|$$

$$f_Y(y) = \tilde{c} \cdot y^{-\tilde{c}-1} \cdot f_X(y^{-\tilde{c}})$$

$$\boxed{\tilde{c} = 1}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{y^2} \cdot f_X\left(\frac{1}{y}\right)$$

ПРИМЕР. $X: E(1)$. Определим функцию

$$Y = X^{\frac{1}{\tilde{c}}}$$

$$f_Y(y) = f_X(y^{\tilde{c}}) \cdot \tilde{c} \cdot y^{\tilde{c}-1}$$

$$\begin{cases} X: E(1) \\ f_X(x) = e^{-x} \end{cases}$$

$$= e^{-y^{\tilde{c}}} \cdot \tilde{c} \cdot y^{\tilde{c}-1}$$

→ Бездуглова распределение Weibull

4.2.4. Экспоненциальная

$$Y = e^X$$

$$X = \ln Y \quad ; \quad \boxed{g^{-1}(Y) = \ln Y}$$

$$F_Y(y) = F_X(\ln y)$$

$$f_Y(y) = f_X(\ln y) \cdot \frac{1}{y}$$

Моменты случайного переменного Y !

$E(Y^k)$ — моменты k -го порядка ($k=1, 2, \dots$)

$$E[Y^k] = E[(e^X)^k] = E(e^{kX})$$

Функция генерации моментов случайного переменного X :

$$g(t) = E(e^{tX}) = M_X(t)$$

$$E(Y^k) = E(e^{kX}) = M_X(k)$$

Пример. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Определите ф-цу плотности, арифметическую среднюю и дисперсию лог-нормального распределения (относительно распределения $Y = e^X$)

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$i) \quad f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{y}$$

$$(ii) \quad E(Y) = M_X(1) \quad ; \quad \boxed{M_X(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2 / 2}}$$

$$E(Y) = e^{\mu + \sigma^2 / 2}$$

$$(iii) \quad E(Y^2) = M_X(2) = e^{2\mu + 2\sigma^2} = e^{2\mu + \sigma^2} \cdot e^{\sigma^2} = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - e^0) = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$$

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = e^{2\mu + 2\sigma^2} - e^{2\mu + \sigma^2} = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$$

$$(iii) \quad E(Y^2) = M_X(2) = e^{2\mu + 2\sigma^2} - e^{2\mu + \sigma^2} = e^{2\mu} (e^{2\sigma^2} - e^{\sigma^2})$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = e^{2\mu + 2\sigma^2} - e^{2\mu + \sigma^2} = e^{2\mu} (e^{2\sigma^2} - e^{\sigma^2})$$

4.2.5. Множествите дистрибуции

X - разподела субитакса

↳ случајна променлива

(1) Дискретно мерење:

$$a_1 \rightarrow X_1$$

$$a_2 \rightarrow X_2$$

$$\vdots$$

$$a_n \rightarrow X_n$$

$$\Rightarrow X = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$$

$$0 \leq a_i \leq 1 \quad i=1, \dots, n$$

(2) Непрестанно мерење

$$S_n: B(n, p)$$

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

експеримент се врши n -пати.
веројатноста за успех p е својот резултатот експерименту
је p .

$P(S_n = k)$ — веројатноста да ќе p n -пати бидејќи
патно k — успех

Пополна разподела — Бернулиева разподела

• S_N — N -случајна променлива

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Условна веројатноста: } P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \\ P(AB) = P(A/B) \cdot P(B) \end{array} \right\}$$

$$P(S_n = k) = P(S_n = k | N = k) \cdot P(N = k) \quad !!$$

• $\gamma(\lambda)$ Пуасонова разподела

$$\gamma(\lambda, p) \quad P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \quad \begin{cases} n \text{ нева} \\ p_n \end{cases}$$

$\Downarrow n \rightarrow \infty$

$n \cdot p_n \rightarrow \lambda$

$$P(S_n = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \quad ; \quad P(\lambda)$$

λ - случайная вероятность

$$P(n|\lambda) = P(N=n | \lambda = \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^n}{n!}$$

λ - константа

$$\Rightarrow \boxed{P(AB) = P(A|B) \cdot P(B)}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_{X|\Lambda}(x, \lambda) = f_{X|\Lambda}(x|\lambda) \cdot f_{\Lambda}(\lambda)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dx = f_Y(y) \quad ; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dy = f_X(x)$$

$$\left\{ \begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|\Lambda}(x, \lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|\Lambda}(x|\lambda) \cdot f_{\Lambda}(\lambda) d\lambda \rightarrow \lambda \text{ непрерыв. случайн.} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} f_X(x) &= \sum_{\lambda \in \Lambda} f_{X|\Lambda}(x|\lambda) \cdot P_{\Lambda}(\lambda) ; \quad \lambda - \text{дискретная случайн.} \end{aligned} \right.$$

• Теорема о глобальной оценке

$$E(X^*) = E_{\Lambda}[E[X^*|\Lambda]]$$

• Последствия:

$$Var[X] = E_{\Lambda}[Var[X|\Lambda]] - Var_{\Lambda}[E[X|\Lambda]]$$

Пример. Производитель фруктов разбросал семена на оба своих поля стандартными (с) и лопатками (А).

Пример. Проверка А семян $X_1: E(0.01)$, а вторая проверка В семян $X_2: E(0.02)$. Каждая проверка проводится независимо.

ими "вероятности" 0,3 за джуде А и 0,7 за джуде С.

а) Определит f -гъу густините за трошак посроче фрек.

б) Определит очекивани трошак и вариацият от трошак случаен изборан фрекидоре.

$$a) f_X(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} f_{X|\lambda}(x|\lambda) \cdot p_\lambda(\lambda)$$

$$\Lambda: \begin{pmatrix} A & C \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

$$f_X(x) = 0,3 \cdot f_{X|\lambda}(x|A) + 0,7 f_{X|\lambda}(x|C)$$

$$f_X(x) = 0,3 \cdot 0,01 \cdot e^{-0,01x} + 0,7 \cdot 0,02 \cdot e^{-0,02x} \quad \checkmark$$

$$- E(X) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_X(x) dx -$$

$$- E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x) dx -$$

$$E(X) = E(E(X|\Lambda))$$

$$= 100 \cdot 0,3 + 50 \cdot 0,7 = 30 + 35 = 65 \quad \checkmark$$

$$E(X|\Lambda): \begin{pmatrix} \beta = 0,01 & \beta = 0,02 \\ 100 & 50 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

$$\text{Var}(X) = E_{\lambda} [\text{Var}[X|\lambda]] + \text{Var}_{\lambda} [E[X|\lambda]]$$

$$= E_{\lambda} \left(\frac{1}{\lambda^2} \right) + \text{Var}_{\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} \right)$$

$X: \mathcal{E}(\lambda)$	$E(X) = \frac{1}{\lambda}$
	$\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Основная теорема о математическом ожидании:

$$E(g(X)) = \int g(x) f_X(x) dx$$

$$\swarrow = \sum_{x_i} g(x_i) p(x_i)$$

$$E_{\lambda} \left(\frac{1}{\lambda^2} \right) = \frac{1}{0.01^2} \cdot 0.3 + \frac{1}{0.02^2} \cdot 0.7 = 4750$$

$$\text{Var} \left[\frac{1}{\lambda} \right] = E_{\lambda} \left[\left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 \right] - \left[E_{\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} \right) \right]^2$$

$$= 4750 - \left[\frac{1}{0.01} \cdot 0.3 + \frac{1}{0.02} \cdot 0.7 \right]^2 = 525$$

$$\text{Var}(X) = 4750 + 525 = 5275.$$

2. $\text{Var}(X) =$

$$X = 0.3 X_1 + 0.7 X_2$$

$$\text{Var}(X) = 0.3^2 \text{Var}(X_1) + 0.7^2 \text{Var}(X_2)$$

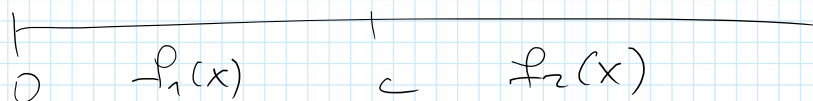
$$= 0.09 \cdot \left(\frac{1}{0.01} \right)^2 + 0.49 \cdot \left(\frac{1}{0.02} \right)^2 \quad \checkmark$$

!! НАПРАВИТЕ !!

Смешане распределение

$$X_1: 0 < x < c : f_1(x)$$

$$X_2: x > c : f_2(x)$$



$$\int_0^c f_1(x) dx = 1$$

$$\int_c^{+\infty} f_2(x) dx = 1$$

$$f_X(x) = \begin{cases} k_1 \cdot f_1(x), & 0 < x < c \\ k_2 \cdot f_2(x), & c < x \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^c k_1 f_1(x) dx + \int_c^{+\infty} k_2 f_2(x) dx = 1$$

$$k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 1 = 1$$

$$k_2 = 1 - k_1$$

$$k_1 = \alpha$$

$$k_2 = 1 - \alpha$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha f_1(x), & 0 < x < c \\ (1 - \alpha) f_2(x), & x > c \end{cases}$$

$f_X(x)$ има брзак за $x=c$!

ПРИМЕР. Одредити функцију густине за двокомпонентну расподелу која је униформна на $(0, c)$ и експоненцијална после тога. Модификоване модел може да се неформално каже.

$$(i) \begin{cases} f_1(x) = \frac{1}{c} \\ f_2(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot (x-c)} \end{cases} \quad \begin{cases} X: U(a, b) \\ f_X(x) = \frac{1}{b-a} \end{cases}$$

↳ поморена експоненцијална расподела

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{c}, & 0 < x < c \\ (1 - \alpha) \lambda e^{-\lambda(x-c)}, & x > c \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{c}, & 0 < x < c \\ (1-\alpha)\lambda e^{-\lambda \cdot (x-c)}, & x > c \end{cases}$$

$$(ii) \quad x \rightarrow c^- \Rightarrow f_X(x) \Rightarrow \frac{\alpha}{c}$$

$$x \rightarrow c^+ \Rightarrow f_X(x) \Rightarrow (1-\alpha) \cdot \lambda$$

$$\frac{\alpha}{c} = (1-\alpha) \lambda$$

$$\frac{\alpha}{c} = \lambda - \alpha \cdot \lambda$$

$$\frac{\alpha}{c} + \alpha \lambda = \lambda$$

$$\alpha \left(\frac{1}{c} + \lambda \right) = \lambda$$

$$\underline{\underline{\alpha}} = \frac{\lambda}{\frac{1}{c} + \lambda} = \frac{c\lambda}{1+c\lambda}$$

$$\underline{\underline{1-\alpha}} = 1 - \frac{c\lambda}{1+c\lambda} = \frac{1}{1+c\lambda}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{c\lambda}{1+c\lambda} \cdot \frac{1}{c}, & 0 < x \leq c \\ \frac{1}{1+c\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot (x-c)}, & x \geq c \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{1+c\lambda}, & 0 < x \leq c \\ \frac{\lambda}{1+c\lambda} \cdot e^{-\lambda \cdot (x-c)}, & x > c \end{cases}$$

• Секретни мас — пренеће погубљивања!