

случајна променљива X

1) има нумеричку вредност

2) та вредност случајна

E_1 : Бацамо дијар.

$$\Omega = \{P, G\} \quad P(P) = 0.5 \quad P(G) = 0.5$$

$$P \rightarrow 0, \quad G \rightarrow 1 \quad X: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Појављује се расподела

закон (правило) по којем се додељују
додељују вероватноће.

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

0, 1, 2, ...

X - случајна променљива

$$F_X(x) = P(X \leq x) - \text{кумулятивна}$$

Ф-ја расподеле
вероватноће

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$$

$$F_X(x) \nearrow$$

непрекидна са десне,
страни!

$$\# f_X(x); \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

f_X - Ф-ја густице

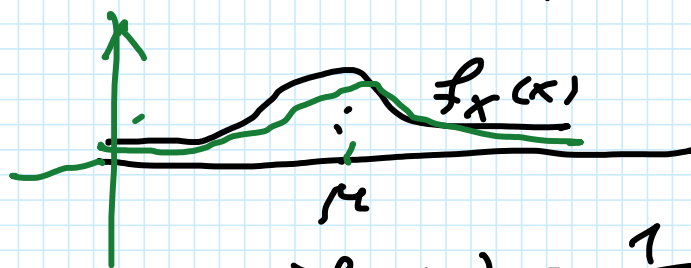
Gauss-ova raspodela!

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$X: N(\mu, \sigma);$$

База расподела

Нормална расподела

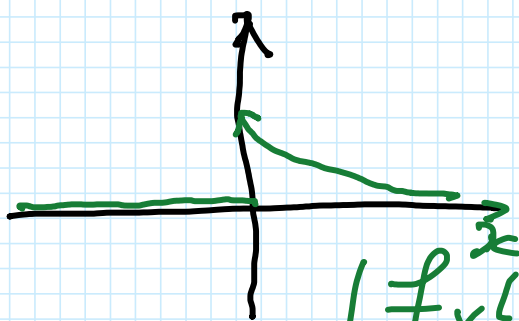


- ϕ је функција

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Експоненцијална расподела

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$



X - износ
времетраја
(месеца)

$f_X(x) \sim$ вероватноћа
да ће му се
износити тај x !

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx$$

износител на λ е:

$$x < 0$$

$$F_X(x) = 0$$

$$x \geq 0$$

$$: F_X(x) = \int_0^x \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt$$

$$= -e^{-\lambda t} \Big|_0^x$$

$$= -e^{-\lambda x} - (-1)$$

$$= 1 - e^{-\lambda x}$$

• Очакване, средна стойност
 $E(X)$

$$(*) \quad E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx$$

$$\underline{X: E(\lambda)}$$

;

$$X: P(\lambda)$$

$$X: \mathcal{E}(\lambda); E(X) = ?$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx$$

$$= \int_0^{+\infty} x \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx \quad \begin{cases} x = u \\ dx = du \\ \vdots \end{cases}$$

$$= -x \cdot e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx \quad \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx = dv \\ -e^{-\lambda x} = v \end{cases}$$

$$= 0 - \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}$$

• Показано је да изједиче имају еквив. басисогену која је средња вредност $\frac{1}{\lambda}$.

$$\Downarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{5}\right);$$

• Параметар басисогена: $\text{Par}(\alpha, \theta)$

$$x \geq 0: f_X(x) = \frac{\alpha \cdot \theta^\alpha}{(\lambda + \theta)^{\alpha+1}}; \quad \begin{matrix} \alpha > 0 \\ \theta > 0 \end{matrix}$$

$$x < 0: f_X(x) = 0$$

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(t) dt = 1 - \left| \frac{\theta}{\lambda + \theta} \right|^\alpha$$

$$\Rightarrow E(X) = \frac{\theta}{\alpha - 1} \quad ; \quad \alpha > 1 \quad \rightarrow \approx \int \frac{1}{x^\alpha} \quad \alpha < 1 \rightarrow +\infty$$

$$1^\circ E(X^1) = \frac{\theta}{\alpha - 1} ; \alpha > 1 \rightarrow \approx \int \frac{1}{x^\alpha} dx \xrightarrow{\alpha < 1} +\infty$$

$$= \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{\alpha \cdot \theta^\alpha}{(x+\theta)^{\alpha+1}} dx$$

$$E(X^2) = \frac{\theta}{(\alpha-1)(\alpha-2)} ; \alpha > 2$$

$$\sigma^2(X) = E(X - E(X))^2$$

$$= E(X^2) - E(X)^2$$

моментите групирова!

ϕ -ја генерираше моментите!

$$g(t) = E(e^{Xt})$$

- не постоје код $\text{Poi}(\alpha, \theta)$ разлог.

Основна теорема о математички еквиваленту:

X - случајна променлива

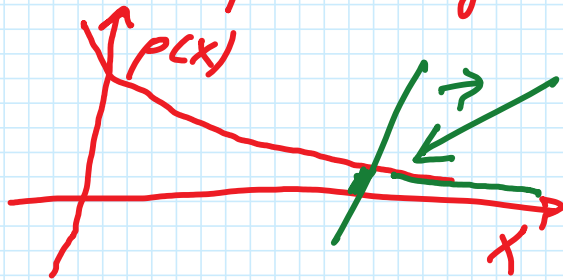
$$Y = g(X)$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x) dx$$

Парето раснотена

$$f_X(x) = \frac{\alpha \cdot \theta^\alpha}{(x + \theta)^{\alpha+1}} \quad \begin{matrix} x \geq 0 \\ \theta > 0 \\ \alpha > 0 \end{matrix}$$

"реџ" раснотена



$$X: \mathcal{E}(0,02)$$

$$Y: \text{Par}(2,50)$$

$$Z: \text{Par}(6,250)$$

$$\begin{aligned} P(X > 500) &= \\ &= 1 - P(X \leq 500) \\ &= 1 - (1 - e^{-500 \cdot 0,02}) \\ &= e^{-100} \approx 3,7 \cdot 10^{(-44)} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} E(X) = \frac{1}{0,02} = 50 \checkmark \\ E(Y) = \frac{50}{2-1} = 50 \checkmark \\ E(Z) = \frac{250}{6-1} = 50 \checkmark \end{array} \right.$$

$$P(Y > 500) = 1 - P(Y \leq 500)$$

$$= 1 - \left(1 - \left(\frac{50}{x+50}\right)^3\right) = \left(\frac{50}{550}\right)^3 = \frac{1}{11^3} = 0,007 \checkmark$$

$$P(Z > 500) = \left(\frac{250}{550}\right)^7 = \left(\frac{5}{11}\right)^7 = 0,004$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X, Y \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_X(x)}{f_Y(x)} = L \\ L = 0 \rightarrow Y \text{ има гребъи рѣи} \\ L = \infty \rightarrow X \text{ има гребъи рѣи} \\ \text{гребъи (мѣжи)} \end{array} \right.$$

пример. Покажете да $\Gamma(x)$ расте по-бързо от всяка степенна функция x^α относно експонентната функция e^x .

Решение: $X: \mathbb{R}^+(x)$, $Y: \Gamma(x)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot e^{-x}}{\frac{\alpha \cdot x^\alpha}{(x+\alpha)^{\alpha+1}}} = \frac{1}{\alpha \cdot \alpha} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+\alpha)^{\alpha+1}}{e^x} \rightarrow 0$$

$\ll \infty$ греб.

$\Gamma(x)$ има гребъи рѣи

Тепер саме новик розподіла
X-кзносителя

Основна функція оцінювача?

(однос оцінювача и оцінювача)
- оцінювач мора да сагласиться
у п'ятих!

французі! → одбуктувати ірті
→ отримувати ірті
кооцінювачів

$$1) X \rightarrow \begin{cases} 0, & x < d \\ x-d, & x \geq d \end{cases}$$

$$2) X \rightarrow \begin{cases} x; & x < d \\ d; & x \geq d \end{cases}$$

$$3) X \rightarrow \alpha \cdot x, \quad 0 < \alpha < 1$$

$$X \xrightarrow{\text{інфляція}} (1+r)X \quad r - \text{своїй інфляції}$$

$$X \rightarrow Y = g(X)$$

$$F_X(x) \quad (\quad F_Y(y))$$

$$\begin{matrix} F_X(x) \\ f_X(x) \end{matrix} \begin{matrix} \left\{ \right. \\ \left. \right\} \end{matrix} \begin{matrix} F_Y(y) \\ f_Y(y) \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(X \leq y) \\ &= P(g(X) \leq y) \\ &= P(X \leq g^{-1}(y)) \end{aligned}$$

$$(1) F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y))$$

$$\cdot f_Y(y) = (F_Y(y))' = [F_X(g^{-1}(y))]'$$

$$(2) f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot (g^{-1}(y))'$$

1) Метод переопределения

$$Y = \theta \cdot X ; \quad X \begin{matrix} \rightarrow F_X(x) \\ \rightarrow f_X(x) \end{matrix}$$

$$\cdot F_Y(y) = P(Y \leq y)$$

$$= P(\theta \cdot X \leq y)$$

$$= P(X \leq \frac{1}{\theta} y)$$

$$= F_X\left(\frac{y}{\theta}\right) \checkmark$$

$$\cdot f_Y(y) = f_X\left(\frac{y}{\theta}\right) \cdot \frac{1}{\theta} \checkmark \checkmark$$

$$Y = \theta X = g(X)$$

$$X = \frac{1}{\theta} \cdot y \Rightarrow g^{-1}(y) = \frac{1}{\theta} \cdot y$$

$$F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y))$$

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{y}{\theta}\right) \checkmark$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot (g^{-1}(y))'$$

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{\sigma}$$

Нека је $X: \mathcal{E}(1)$; одредити
расподелу сл. в. $Y = \sigma \cdot X$

Решетве: $X: f_X(x) = e^{-x}, x \geq 0$

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{y}{\sigma}}$$

$$f_Y(y) = \underbrace{\frac{1}{\sigma} \cdot e^{-\frac{y}{\sigma}}}_{\mathcal{E}\left(\frac{1}{\sigma}\right)} \rightarrow \text{Коју расподелу има } Y?$$

1) Скалирана расподела.
 X расподела
 σX — има исту расподелу

2) Скалирана расподела са скаларним параметром.

X — има расподелу са параметром λ
 $Y = \sigma X$ — има расподелу са параметром $\sigma \cdot \lambda$

Види 4.5 Парето расподела има скаларни параметар.

Решетве: $X: \text{Par}(\alpha, \sigma)$

$$f_X(x) = \frac{\alpha \cdot \sigma^\alpha}{(\sigma + x)^{\alpha+1}} \quad \checkmark$$

$$Y = k \cdot x$$

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{1}{k} \cdot y\right) \cdot \frac{1}{k}$$

$$= \frac{\alpha \cdot \theta^\alpha}{\left(\theta + \frac{1}{k} y\right)^{\alpha+1}} \cdot \frac{1}{k} = \frac{\alpha \cdot \theta^\alpha}{\left(\frac{k\theta + y}{k}\right)^{\alpha+1}} \cdot \frac{1}{k}$$

$$= \frac{\alpha \cdot \theta^\alpha}{\frac{(k\theta + y)^{\alpha+1}}{k^{\alpha+1}}} \cdot \frac{1}{k} = \frac{\alpha \cdot k^\alpha \theta^\alpha}{(k\theta + y)^{\alpha+1}}$$

$$= \frac{\alpha \cdot (k\theta)^\alpha}{(k\theta + y)^{\alpha+1}} \sim \text{Par}(\alpha, k \cdot \theta)$$

✓